

المحاضرة 8

الأربعاء 19 / 15 / 2018 م

تأريخ عن لدوال لقيوسية :

تقريباً 1

لتكن $R \rightarrow [0,1] : \varphi$ دالة ديفزية لقيمة لـ 1

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

أثبت أنه الدالة φ متوسدة على المجموعة $[0,1]$
 الحلال :

لنأخذ عدداً حقيقياً عشوائياً

$$E(\varphi > c) = \{x \in [0,1] : \varphi(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} [0,1] & , c < 0 \\ [0,1] \cap \mathbb{Q} & , 0 < c < 1 \\ \emptyset & , c \geq 1 \end{cases}$$

وبما أن المجموعة $[0,1]$ ، $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ، و \emptyset كلاهما متوسدةفإنه المجموعة $E(\varphi > c)$ متوسدة فبما أن كل عدد حقيقي c لذلك تكون الدالة φ متوسدة .

تقريباً 2

لتكن الدالة $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

هل ψ متوسدة على \mathbb{R} ؟

الحلال :

لنأخذ عدداً حقيقياً عشوائياً

$$E(\psi > c) = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R} & , c < 0 \\ \mathbb{Q} & , 0 < c < 1 \\ \emptyset & , c \geq 1 \end{cases}$$

دعنا أن المجموعات P, Q, ϕ فتكون ϕ مجموعة طائفة المجموعة $E(\psi > c)$ فتكون ϕ من أجل كل عدد حقيقي c وبالتالي، الدالة ψ فتكون

طريقة 2.

لكن c عدداً حقيقياً عسكياً

$$E(\psi < c) = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) < c\}$$

$$= \begin{cases} \phi & ; c \leq 0 \\ Q & ; 0 < c < 1 \\ R & ; c \geq 1 \end{cases}$$

نعم 3

لكن الدالة $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $x=0$ $P(x) = \begin{cases} 0 & ; x=0 \\ \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \end{cases}$

هذا فتكون \mathbb{R} ؟

الخط

لكن c عدداً حقيقياً عسكياً

$$E(P > c) = \{x \in \mathbb{R} : P(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R} & ; c < 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & ; c = 0 \\]-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}[& ; c > 0 \end{cases}$$

دعنا أن المجموعات P, Q, ϕ فتكون ϕ من أجل كل عدد حقيقي c وبالتالي، الدالة ψ فتكون

المجموعة $E(\psi > c)$ فتكون

من أجل كل عدد حقيقي c $P(x) > c \Leftrightarrow \frac{1}{x} > c \Leftrightarrow x < \frac{1}{c}$ $\Rightarrow x \in]-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}[$

وهو المطلوب

تمرين 4

لتكن الدالة $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

هل f متوصلة على $[-1, 1]$ ؟

الحل :

لكن c عدد حقيقي عشوائي

$$E(f \leq c) = \{x \in [-1, 1] : f(x) \leq c\}$$

$$= \begin{cases} \emptyset & , c < 0 \\ \{0\} & , c = 0 \end{cases}$$

$$[-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}] \cup [-1, -\frac{1}{\sqrt{c}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{c}}, 1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq c \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{c} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{\sqrt{c}}$$

في المجموعات بالطرف الآخر تكون

$$[-\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}] \cup [-1, -\frac{1}{\sqrt{c}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{c}}, 1]$$

في ذلك بناء المجموعة $E(f \leq c)$ فتكون

متماثل كذا في وبالتالي الدالة f متوصلة

تمرين 5

أثبت أن كل دالة مستمرة على مجموعة E تكون متوصلة على E

الحل :

لكن $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة على E وليست أمثلة المجموعة

$E(f \leq c)$ متوصلة متماثل كذا عدد حقيقي c

لذلك يكفي إثبات أن $E(f \leq c)$ متوصلة وتكون إثبات ذلك

أن تكون $E(f \leq c)$ مجموعة مغلقة

لأنه إذا كانت $x_n \in E(f \leq c)$ متماثل المجموعة $E(f \leq c)$ متوصلة

$$x_n \rightarrow x \text{ و } x_n \in E(f \leq c) \Rightarrow x \in E(f \leq c)$$

نظائراً $x_n \in E(f \leq c)$ فإنه إذا $n \rightarrow \infty$ $f(x_n) \leq c$
 دالة f دالة مفرقة فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \leq c$$

 لذلك $x \in E(f \leq c)$ أي أنه
 $E(f \leq c)$ مجموعة مغلقة في E بواسطة f

تمرين 7

أثبت أن كل دالة مفرقة تقريباً فلكان على E تكون متوسعة على E

لنكن $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مفرقة تقريباً فلكان على E
 على المجموعة E

هذا يعني أنه توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ حيث أن $\lambda(E_0) = 0$
 والدالة f غير مفرقة على E_0 ، ولكن مفرقة على $E \setminus E_0$
 (تأخذ الفرق)

\Leftarrow أنه f متوسعة على E_0 و $\lambda(E_0) = 0$
 \Rightarrow $f|_{E \setminus E_0}$ متوسعة على $E \setminus E_0$ لأنه f مفرقة على $E \setminus E_0$ وبالتالي
 \Leftarrow فإنه f متوسعة على E لأن $E = E_0 \cup (E \setminus E_0)$
 وهو المطلوب

تمرين 7

نفرض A مجموعة جزئية من مجموعة أخرى E عندها نعرف الدالة
 المميزة لـ A بالشكل

$$I_A: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا } x \in A \\ 0 & \text{إذا } x \notin A \end{cases}$$

أثبت أنه الدالة I_A تكون متوسعة إذا وفقط إذا كانت المجموعة
 A مقيوسة

الحل:

نقرب ان المجموعه A قويه \iff كل عدد حقيقي c كذا:

$$E(I_A > c) = \{x \in E : I_A(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} E & ; c < 0 \\ A & ; 0 \leq c < 1 \\ \emptyset & ; c \geq 1 \end{cases}$$

ومن ذلك يتبع ان المجموعه $E(I_A > c)$ قويه من اجل كل عدد حقيقي c
 \iff الداله I_A قويه على E

\Rightarrow نعتبر الان ان الداله I_A قويه لهذا يعني ان شريطه

$$E(I_A > c) \text{ قويه من اجل كل عدد } c$$

بما ان $c=0$ \iff لاننا لدينا:

$$E(I_A > 0) = \{x \in E : I_A(x) > 0\}$$

$$= \{x \in E : I_A(x) = 1\} = A$$

الطرف الايسر قوي \iff الطرف الايمن قوي \iff

نتكون المجموعه A قويه \iff هو المطلوب

انتهى الشرح - 5